Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2019

PRIMER PARCIAL

9 de octubre de 2019

1. **(7 puntos)**

   Sean $\mathcal{P} := \{p_n\}_{n\geq 1}$ una familia separante de seminormas en X, $\tau_{\mathcal{P}}$ la topología definida por $\mathcal{P}$, y $d : X \times X \to [0, \infty)$ dada por $d(x, y) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$, $\forall x, y \in X$. Probar que d es una métrica en X, y que $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_d$, donde τ_d es la topología definida por d en X.

2. **(8 puntos)**

   Sea c_0 el espacio de sucesiones complejas que tienden a cero, con su norma usual (es decir: $\| \ \|_\infty$). Dado $x \in c_0$ se define $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(n)$.

   a) Probar que φ es una funcional lineal continua y calcular su norma.

   b) Averiguar si existe $x \in c_0$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ y $\varphi(x) = \|\varphi\|$, y en caso afirmativo exhibir un tal x.

3. **(10 puntos)**

   Para cada $p \in (0, 1)$ sea $\ell^p := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_n |x(n)|^p < \infty\}$ con la topología definida por la métrica $d(x, y) = \sum_n |x(n) - y(n)|^p$.

   a) Probar que ℓ^p no es localmente convexo.

   b) Encontrar un isomorfismo entre ℓ^∞ y el espacio dual de ℓ^p, y probar que con dicha identificación la bola unidad cerrada de ℓ^∞ es w^*-compacta.